

1. مقارنة عددين حقيقيين:

تعريف

ب و a عددين حقيقيين
نقول إن a أصغر من أو تساوي b ونكتب $a \leq b$
إذا كان $a - b \leq 0$ أو $b - a \geq 0$

نتيجة

لمقارنة عددين حقيقيين نحدد إشارة فرقيهما

مثال

-- لنقارن العددين $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

$$\text{لدينا: } (2\sqrt{3}-4) - (\sqrt{3}-5) = 2\sqrt{3}-4-\sqrt{3}+5$$

$$= 2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4$$

$$= \sqrt{3}+1$$

وبما أن: $\sqrt{3}+1 > 0$ فإن $(2\sqrt{3}-4) - (\sqrt{3}-5) > 0$

ومنه فإن: $2\sqrt{3}-4 > \sqrt{3}-5$

خاصية

a و b و c أعداد حقيقية
إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$

II. الترتيب والجمع

خاصية

a ، b ، c أعداد حقيقية
 $a \leq b$ تعني $a+c \leq b+c$

مثال

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث: $x < 3$

لنقارن العددين -2 و $x-5$.

لدينا: $x < 3$

يعني أن: $x + (-5) < 3 + (-5)$

$$x - 5 < 3 - 5$$

وبالتالي فإن: $x - 5 < -2$

نتيجة

a و b و c و d أعداد حقيقية

إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a + c \leq b + d$

x و y عدنان حقيقيان بحيث: $x < 5$ و $2 > y$

لنبين أن: $x + y < 7$

$$\left. \begin{array}{l} x < 5 \\ y < 2 \end{array} \right\} \text{لدينا: } \left. \begin{array}{l} x < 5 \\ 2 > y \end{array} \right\} \text{يعني أن:}$$

إذن: $x + y < 5 + 2$ أي $x + y < 7$

III. الترتيب و الضرب

خاصية

a و b و c أعداد حقيقية

- إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $ac \leq bc$
- إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $ac \geq bc$
- إذا كان $ac \leq bc$ و $c > 0$ فإن $a \leq b$
- إذا كان $ac \geq bc$ و $c < 0$ فإن $a \leq b$

مثال

لدينا: $11 < 23$ يعني أن $11 \times 4 < 23 \times 4$

$3 < 10$ يعني أن $3 \times (-2) > 10 \times (-2)$

نتيجة

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة

إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $ac \leq bd$

تطبيق

x و y عدنان حقيقيان حيث $x < -2$ و $y > 3$

بين أن $-3x + 2y > 12$

خاصية

a و b عدنان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس الإشارة

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ تعني } a \leq b$$

تطبيق

a و b عدنان حقيقيان حيث:

$$0.4 \leq b \leq 1.2 \text{ و } 2.4 \leq a \leq 3.6$$

$$\text{بين أن } 2 \leq \frac{a}{b} \leq 9$$

IV. الترتيب و المربع

خاصيات

أ - a و b عدنان حقيقيان موجبان

- إذا كان $a \leq b$ تعني $a^2 \leq b^2$
- إذا كان $a^2 \leq b^2$ تعني $a \leq b$

ب - a و b عدنان حقيقيان سالبان

- إذا كان $a \leq b$ تعني $a^2 \geq b^2$
- إذا كان $a^2 \geq b^2$ تعني $a \leq b$

تطبيق

x و y عدنان حقيقيان حيث: $2 \leq x \leq 5$ و $-2 \leq y \leq -1$

$$\text{بين أن } 5 \leq x^2 + y^2 \leq 29$$

V. الترتيب و الجذر المربع

خاصية

a و b عدنان حقيقيان موجبان

- إذا كان $a \leq b$ تعني $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
- إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ تعني $a \leq b$

أمثلة:

(1) - لنقارن العددين: $2\sqrt{7}$ و $3\sqrt{3}$.

$$\left. \begin{array}{l} (2\sqrt{7})^2 = 28 \\ (3\sqrt{3})^2 = 27 \end{array} \right\} \text{ لدينا:}$$

إذن $(3\sqrt{3})^2 < (2\sqrt{7})^2$ ومنه فإن $3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}$

(2) - لنقارن العددين: $-2\sqrt{5}$ و $-3\sqrt{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} (2\sqrt{5})^2 = 20 \\ (3\sqrt{2})^2 = 18 \end{array} \right\} \text{لدينا: إذن } (3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2 \text{ ومنه فإن } 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$$

وبالتالي فإن: $-3\sqrt{2} > -2\sqrt{5}$

VI. التآطير

1 - تآطير مجموع عددين حقيقيين

$$a \leq x \leq b \text{ و } c \leq y \leq d \text{ حيث } a \leq x \leq b \text{ و } c \leq y \leq d \\ a + c \leq x + y \leq b + d$$

2 - تآطير مقابل عدد حقيقي:

$$x \leq a \leq y \text{ عدد حقيقي بحيث: } \\ -y \leq -a \leq -x$$

3 - تآطير فرق عددين حقيقيين

$$z \leq b \leq t \text{ و } x \leq a \leq y \text{ حيث } t \text{ و } z \text{ و } y \text{ و } x \text{ و } b \text{ و } a \\ x - t \leq a - b \leq y - z$$

ملاحظة هامة:

لتآطير $a - b$ ، نضع: $a - b = a + (-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه.

مثال x و y عددان حقيقيان بحيث: $3 \leq x \leq 8$ و $-5 \leq y \leq -2$
لنؤطر $x - y$.

لدينا:

$$3 \leq x \leq 8 \text{ و } 2 \leq -y \leq 5 \\ \text{إذن: } 3 + 2 \leq x + (-y) \leq 8 + 5 \\ 5 \leq x - y \leq 13 \text{ ومنه فإن:}$$

4 - تآطير جداء عددين حقيقيين

$$z \leq b \leq t \text{ و } x \leq a \leq y \text{ حيث } t \text{ و } z \text{ و } y \text{ و } x \text{ و } b \text{ و } a \\ x \times z \leq a \times b \leq y \times t$$

مثال 1 x و y عددان حقيقيان بحيث: $3 \leq x \leq 7$ و $1 \leq y \leq 3$

لنؤطر $x \times y$.

لدينا: $3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$

إذن: $3 \leq x \times y \leq 21$

مثال 2:

x و y عدنان حقيقيان بحيث: $-5 \leq x \leq -2$ و $3 \leq y \leq 6$
لنؤطر $x \times y$.

لدينا: $2 \leq -x \leq 5$ و $3 \leq y \leq 6$

إذن: $2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6$ أي $6 \leq -xy \leq 30$

ومنه فإن: $-30 \leq xy \leq -6$

5- تأطير مقلوب عدد حقيقي غير منعدم:

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث: $x \leq a \leq y$

$$\text{إذن: } \frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$$

6- تأطير خارج عددين:

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث: $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $z \neq 0$ و $t \neq 0$

إذا كان $z \leq b \leq t$ و $x \leq a \leq y$ فإن $\frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z}$

ملاحظة هامة:

لتأطير $\frac{a}{b}$ نضع: $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

مثال:

x و y عدنان حقيقيان بحيث: $3 \leq x \leq 7$ و $5 \leq y \leq 9$

لنؤطر $\frac{x}{y}$.

لدينا:

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$$

إذن $\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$ أي $3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$

وبالتالي فإن: $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$

تمرين تطبيقي:

a و b وأعداد حقيقية بحيث:

$2 \leq a \leq 4$ و $-5 \leq b \leq -3$ و $-5 \leq c \leq 2$

أطر: a^2 و b^2 و $2a+4b-3c$ و $\frac{b+c}{a^2}$