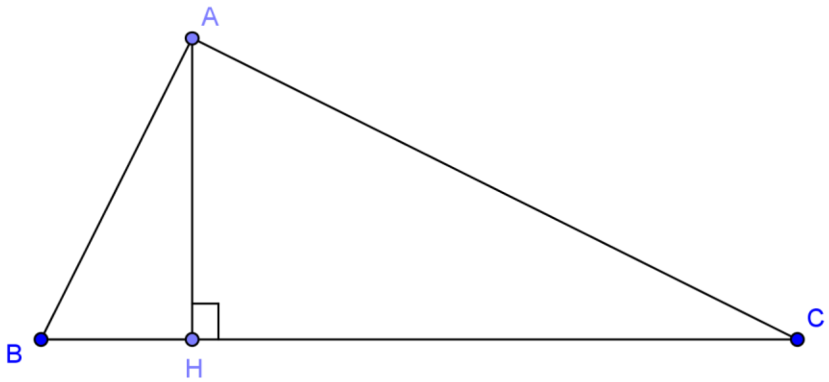
مبرهنة فيثاغورس

التمرين الأول

ABC مثلث قائم الزاوية في B حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $AB^2 = AC^2 - BC^2$ $= 9^2 - 4^2$ $= 81 - 16 = 65$ إذن $AB = \sqrt{65}$	ABC مثلث قائم الزاوية في A حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة $AB^2 + AC^2 = BC^2$ $AB^2 = BC^2 - AC^2$ $= 5^2 - 4^2$ $= 25 - 16$ $= 9$ إذن $AB = 3$	ABC مثلث قائم الزاوية في C حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة $AB^2 = BC^2 + AC^2$ $= 8^2 + 6^2$ $= 64 + 36$ $= 100$ إذن $AB = 10$

التمرين الثاني



لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A لنحسب AB بتطبيق مبرهنة فيثاغورس المباشرة على المثلث ABH $AB^2 = AH^2 + BH^2$ $AB^2 = 4^2 + 2^2$ $AB^2 = 16 + 4 = 20$ إذن $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ لدينا $HC = BC - BH$ $HC = 10 - 2 = 8$	لنحسب AC بتطبيق مبرهنة فيثاغورس المباشرة على المثلث AHC $AC^2 = AH^2 + CH^2$ $AC^2 = 4^2 + 8^2$ $AC^2 = 16 + 64 = 80$ إذن $AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ لدينا $BC^2 = 100$ و $AC^2 = 80$ و $AB^2 = 20$ لدينا $AB^2 + AC^2 = 80 + 20 = 100$ ومنه فإن $AB^2 + AC^2 = BC^2$ وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

hassan.sabil56@gmail.com

التمرين الثالث

نحسب EF

في المثلث OEM القائم الزاوية في M

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن

$$OE^2 = OM^2 + ME^2$$

$$ME^2 = OE^2 - OM^2$$

$$= \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)^2$$

$$= 12 - 3 = 9$$

إذن $ME = 3$

وبالمثل نبين أن $MF = 3$

وبما $M \in [EF]$ **فإن** $EF = ME + MF$

فإن $\boxed{EF = 6}$

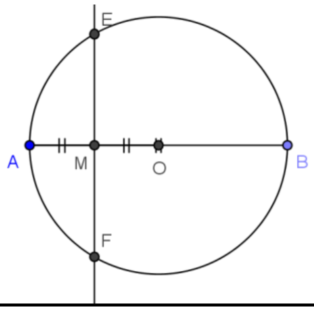
بتطبيق مبرهنة فيثاغورس المباشرة على المثلث MEB القائم الزاوية في M

$$BE^2 = EM^2 + MB^2$$

$$BE^2 = 3^2 + \left(2\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)^2$$

$$BE^2 = 9 + 27 = 36$$

إذن $\boxed{BE = 6}$



التمرين الرابع

لنحدد طبيعة المثلث AMB

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس المباشرة على المثلثين ADM و BMC القائمان الزاوية في M

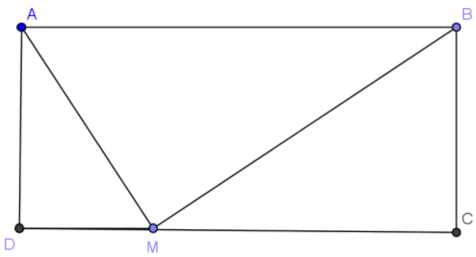
نجد $AM^2 = 13$ و $BM^2 = 29.25$

ولدينا $AB^2 = 42.25$

ومنه فإن $29.25 + 13 = 42.25$

أي $BM^2 + AM^2 = AB^2$

ح مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث AMB قائم الزاوية في M



التمرين الخامس

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس المباشرة على المثلث ABH القائم الزاوية في H

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

إذن $BH^2 = AB^2 - AH^2$

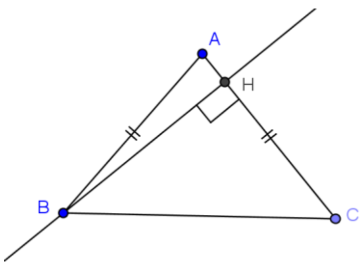
نعلم أن $AB = AC$ (ABC متساوي الساقين في A)

و بالتالي $BH^2 = AC^2 - AH^2$

$$BH^2 = (AH + HC)^2 - AH^2$$

$$BH^2 = \cancel{AH^2} + CH^2 + 2AH \times CH - \cancel{AH^2}$$

إذن $\boxed{BH^2 = CH^2 + 2AH \times CH}$



التمرين السادس

- نبين أن $AB\times AC = AH\times BC$

لتكن S مساحة المثلث

لدينا $S = \dfrac{AH\times BC}{2}$ و $S = \dfrac{AB\times AC}{2}$

بالتالي فإن $AH\times BC = AB\times AC$

- نبين أن $AH^2 = HB\times HC$

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة على المثلث ABC القائم الزاوية في A

لدينا $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وبالتالي فإن $AB^2 + AC^2 = \left(BH + HC\right)^2$

$$AB^2 + AC^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH\times CH$$

$$AB^2 - BH^2 + AC^2 - CH^2 = 2BH\times CH$$

$$AH^2 + AH^2 = 2BH\times CH$$

$$\cancel{2}AH^2 = \cancel{2}BH\times CH$$

إذن $AH^2 = BH\times CH$

- نبين أن $AB^2 = BH\times BC$

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة على المثلث ABH القائم الزاوية في H

لدينا $AB^2 = AH^2 + BH^2$

نعوض AH^2 ب $HB\times HC$

وبالتالي فإن $AB^2 = HB\times HC + BH^2$

$$= HB\times\left(HC + HB\right)$$

$$AB^2 = HB\times BC$$

- ونفس الطريقة نبين أن $AC^2 = CH\times CB$

التمرين السابع

- لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية

لدينا $BC^2 = 10^2 = 100$ و $AB^2 = 8^2 = 64$

و $AC^2 = 6^2 = 36$

ومنه فإن $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

- حساب CH

لدينا حسب العلاقة $AC^2 = CH\times CB$

إذن $CH = \dfrac{AC^2}{CB} = \dfrac{36}{10}$

ومنه فإن $\boxed{CH = 3.6}$

- حساب BH

لدينا $BH = BC - CH$

$BH = 10 - 3.6$

$\boxed{BH = 6.4}$

- حساب AH

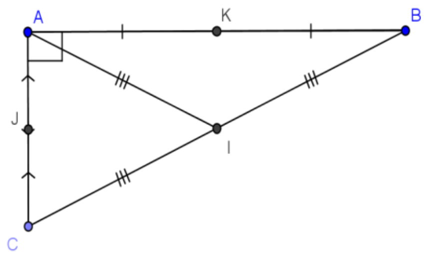
لدينا حسب العلاقة المترية $AH\times BC = AB\times AC$

$$AH = \frac{AB\times AC}{BC}$$

$$AH = \frac{8\times 6}{10} = \frac{48}{10}$$

$\boxed{AH = 4.8}$

التمرين الثامن



- نبين أن $AI^2+BJ^2+CK^2=\frac{3}{2}BC^2$

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة على كل من المثلثين ABJ و ACK القائمان الزاوية في A

لدينا $BJ^2=AB^2+AJ^2$ و $CK^2=AC^2+AK^2$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}AI^2+BJ^2+CK^2&=AI^2+AB^2+AJ^2+AC^2+AK^2\\&=AB^2+AC^2+AK^2+AJ^2+AI^2\\&=AB^2+AC^2+\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BC\right)^2\\&=BC^2+\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2\right)+\frac{1}{4}BC^2\\&=BC^2+\frac{1}{4}BC^2+\frac{1}{4}BC^2\end{aligned}$$

ومنه فإن $AI^2+BJ^2+CK^2=\frac{3}{2}BC^2$