ORDRE ET OPERATIONS

I. COMPARAISON DE DEUX NOMBRES REELS

Règle

a et b deux nombres réels
$a \leq b$ équivaut $a - b \leq 0$
$a \geq b$ équivaut $a - b \geq 0$

Résultat

Pour comparer deux nombres réels il suffit d'étudier le signe de leur différence

Exemple

comparer $(x+2)(x-3)$ et $(x-4)(x+3)$

$$(x+2)(x-3)-(x-4)(x+3) = (x^2-3x+2x-6)-(x^2+3x-4x-12)$$
$$= (x^2-x-6)-(x^2-x-12)$$
$$= x^2-x-6-x^2+x+12$$
$$= 6$$

Puisque $6 > 0$ alors $(x+2)(x-3)-(x-4)(x+3) \geq 0$

Donc $(x+2)(x-3) \geq (x-4)(x+3)$

II. ORDRE ET OPERATIONS

1) L'addition

✓ Règle

a ; b et c sont trois nombres réels
Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$
Si $a \leq b$ alors $a - c \leq b - c$

✓ Conséquence

a ; b ; c et d sont quatre nombres réels
Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

Exemple

Comparer $2(3+\sqrt{2})$ et $7+\sqrt{8}$

on a $2(3+\sqrt{2}) = 6+2\sqrt{2}$ et $7+\sqrt{8} = 7+2\sqrt{2}$

et puisque $6 < 7$ alors $6+2\sqrt{2} \leq 7+2\sqrt{2}$

donc $2(3+\sqrt{2}) \leq 7+\sqrt{8}$

2) La multiplication

✓ Règle 1

a ; b et c sont trois nombres réels

Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $ac \leq bc$ et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $ac \geq bc$ et $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

hassan.sabil56@gmail.com

✓ *Conséquence*

- a et b deux nombres réels

Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$

- a ; b ; c et d sont quatre nombres réels strictement positifs

Si $a \leq b$ et $a\, c \leq d$ alors $ac \leq bd$

Exemple

Soient x et y deux nombres réels tels que $x \geq y$

Comparer $\dfrac{-\sqrt{3}(x+2)}{5}$ et $\dfrac{-\sqrt{3}(y+2)}{5}$

On a $x \geq y$ alors $x+2 \geq y+2$ et puisque $-\sqrt{2} < 0$ alors $-\sqrt{2}(x+2) \leq -\sqrt{2}(y+2)$

Par suite $\dfrac{-\sqrt{2}(x+2)}{5} \leq \dfrac{-\sqrt{2}(y+2)}{5}$ car $5 > 0$

✓ *Règle 2*

> a et b deux nombres réels non nuls de même signe
>
> Si $a \leq b$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$

Exemple

Comparer $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}$

On a $2 \leq 3$ donc $2+\sqrt{3} \leq 3+\sqrt{3}$

Et puisque $2+\sqrt{3}$ et $3+\sqrt{3}$ ont le même signe (positifs)

Alors $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} \geq \dfrac{1}{3+\sqrt{3}}$

✓ *Règle 3*

> a et b deux nombres réels positifs
>
> Si $a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$
>
> a et b deux nombres réels négatifs
>
> Si $a \leq b$ alors $a^2 \geq b^2$

Soient a et b tels que $a = 3\sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{7}$

Comparer a^2 et b^2

On a $a = 3\sqrt{3}$ $b = 2\sqrt{7}$ $a^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27$ $b^2 = \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 28$	On a $28 > 27$ $\left(2\sqrt{7}\right)^2 \geq \left(2\sqrt{7}\right)^2$ Donc $b^2 \geq a^2$ D'où $b \geq a$

✓ Règle 4

a et b deux nombres réels positifs Si $a \le b$ alors $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

Exemple

Comparer $\sqrt{7+4\sqrt{2}}$ et $\sqrt{5+4\sqrt{2}}$

On a $7 \ge 5$ alors $7+4\sqrt{2} \ge 5+4\sqrt{2}$

Et puisque : $7+4\sqrt{2}$ et $5+4\sqrt{2}$ sont positifs

Alors : $\sqrt{7+4\sqrt{2}} \ge \sqrt{5+4\sqrt{2}}$

III. ENCADREMENT

✓ Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \le b$ et x un nombre réel Chaque écriture $a \le x \le b$; $a \le x < b$; $a < x \le b$ et $a < x < b$ est appelée un encadrement de x On dit que x est encadré par a et b

✓ Encadrement d'une somme

a ; b ; c ; d ; x et y sont des nombres réels Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ alors $a+c \le x+y \le b+d$

Exemple

a et b deux réels tels que $3.4 \le a \le 3.6$ et $-2 \le b \le 1.6$

Encadrer $a+b$ et $a-b$

$3.4 \le a \le 3.6$ $-2 \le b \le 1.6$ $3.4+(-2) \le a+b \le 3.6+1.6$ $1.4 \le a+b \le 5.2$	$3.4 \le a \le 3.6$ $-1.6 \le -b \le 2$ $3.4+(-1.6) \le a+(-b) \le 3.6+2$ $1.8 \le a-b \le 5.6$

Encadrement d'un produit

a ; b ; c ; d ; x et y sont des nombres réels positifs Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ alors $ac \le xy \le bd$

hassan.sabil56@gmail.com

سبيل للرياضيات

Exemple

a et b *deux réels tels que* $2.4 \le a \le 3.6$ *et* $0.4 \le b \le 1.2$

Encadrer ab *et* $\frac{a}{b}$

$2.4 \le a \le 3.6$ $0.4 \le b \le 1.2$ *Les nombres a et b sont positifs* $2.4 \times 0.4 \le ab \le 3.6 \times 1.2$ $0.96 \le ab \le 4.32$	$2.4 \le a \le 3.6$ $\frac{1}{1.2} \le \frac{1}{b} \le \frac{1}{0.4}$ *Les nombres a et* $\frac{1}{b}$ *sont positifs* $2.4 \times \frac{1}{1.2} \le a \times \frac{1}{b} \le 3.6 \times \frac{1}{0.4}$ $2 \le \frac{a}{b} \le 9$

hassan.sabil56@gmail.com