VECTEURS ET TRANSLATION

سبيل للرياضيات

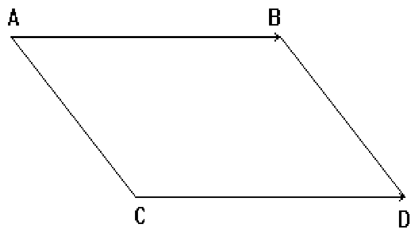
I. EGALITE DE DEUX VECTEURS

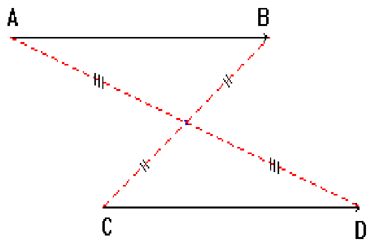
Définition

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme

Figure





Propriété

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Signifie que :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction $(AB)//(CD)$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même sens

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même norme $AB = CD$

Vecteur nul

$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $A = B$ (A et B sont confondus)

Opposé d'un vecteur

Opposé d'un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$

On écrit $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Exercice

$ABCD$ un parallélogramme

1. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$
2. Montrer que $DECB$ est un parallélogramme

   Réponse

   On a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ($ABCD$ un parallélogramme)

   $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ (données)

   Alors $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$

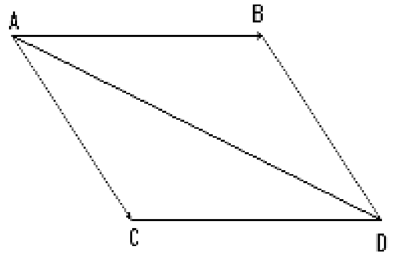
   Donc $DECB$ est un parallélogramme

II. SOMME DE DEUX VECTEURS

Définition

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

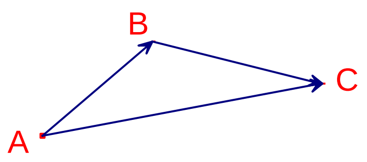
$ABDC$ est un parallélogramme



Relation de Chasles

A, B et C trois points du plan

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Cette relation est appelée Relation de Chasles

Exemple

Simplifier les écritures suivantes :

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}$

Réponse

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MM}=\vec{0}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}\\&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

III. PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN REEL

finition

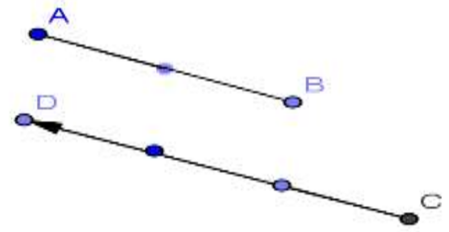
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul

On dit que $\overrightarrow{AC}$ est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le réel k et on écrit $\overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}$

Si $k>0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction , même sens et $AC=k.AB$

Si $k<0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même direction , sens opposé et $AC=-k.AB$

Exemple

A , B et C trois points non nuls Construis le point D tel que $\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ Signifie que $(AB)//(CD)$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires de sens opposés	

Propriété

Soit k un nombre réel non nul
Si $\overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}$ alors les points A ; B et C sont alignés
Si $\overrightarrow{CD}=k.\overrightarrow{AB}$ alors $(AB)//(CD)$

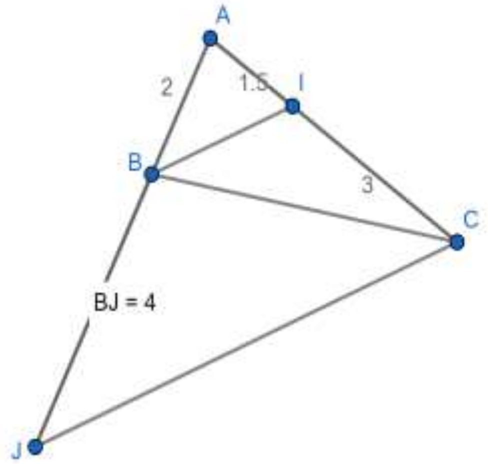
Exercice

ABC un triangle

Construire les points I et J tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AB}$

Montrer que $(BI)//(CJ)$

Réponse

Montrons que $\overrightarrow{BI}=k\,\overrightarrow{JC}$ avec k un réel On a $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JC})$ $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\times 3\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{JC}$ Donc $(BI)//(JC)$	

hassan.sabil56@gmail.com

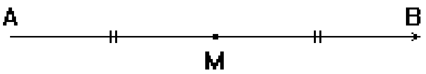
IV. MILIEU D'UN SEGMENT

Propriété

A et B deux points distincts du plan

Le point M est le milieu de $[AB]$ signifie que $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

On a aussi $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



V. TRANSLATION

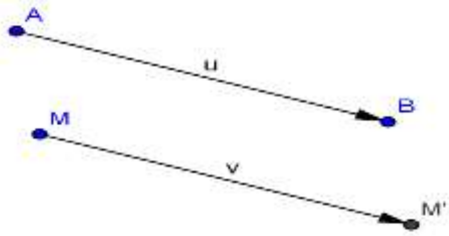
Définition

Soient A et B deux points distincts du plan

Le point M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B signifie que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

On dit aussi que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Figure

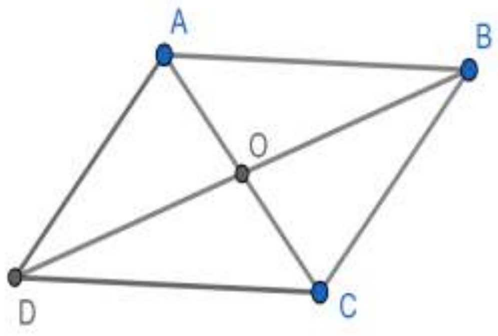


Exemple

$ABCD$ un parallélogramme de centre O

O est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$

C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



Propriété

Si M' et N … ion

alors $\overrightarrow{M'}$ …

VECTEURS ET TRANSLATION

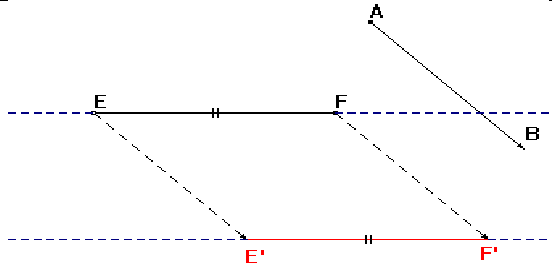
Résultat

La translat…

VI. IMAGE D'UNE FIGURE PAR UNE TRANSLATION

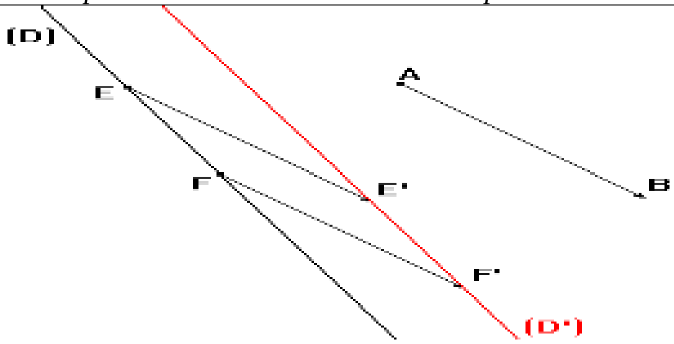
a) L'image d'un segment

L'image d'un segment $[EF]$ par une translation est le segment $[E'F']$ tel que E' et F' sont les images respectifs de E et F par la même translation



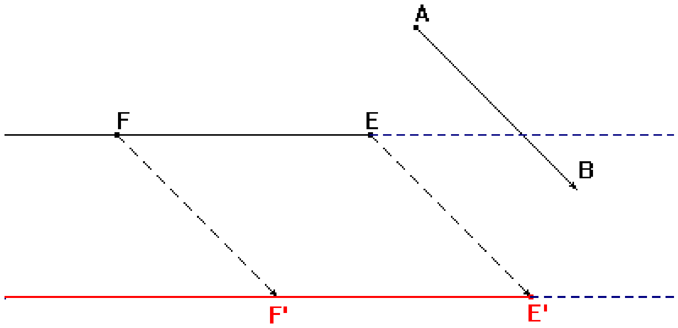
b) L'image d'une droite

L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle à cette droite



c) L'image d'une demi-droite

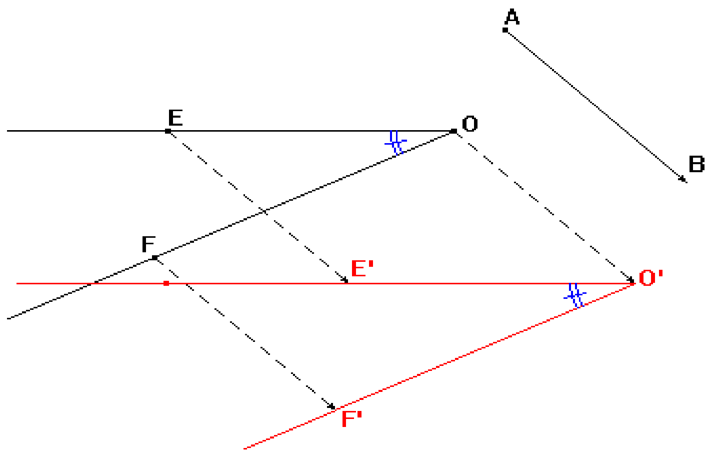
L'image d'une demi-droite $[EF)$ par une translation est la demi-droite $[E'F')$ tel que E' et F' sont les images respectifs de E et F par la même translation



d) L'image d'un angle

L'image d'un angle $E\hat{O}F$ par une translation est l'angle $E'\hat{O}'F'$ tel que E', O' et F' sont les images respectifs de E, O et F par la même translation et on a $E\hat{O}F = E'\hat{O}'F'$

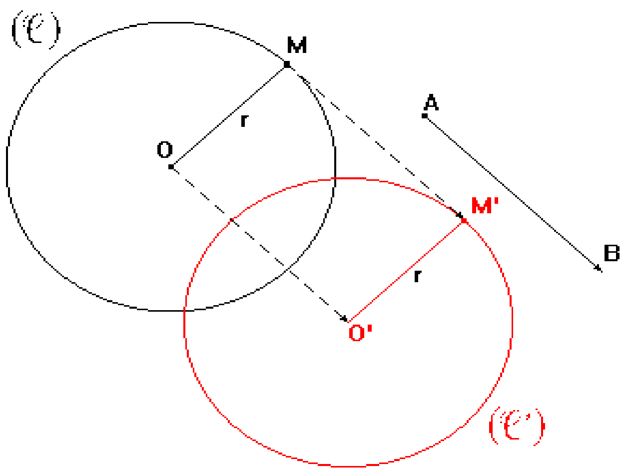
hassan.sabil56@gmail.com



On dit que la translation conserve la mesure des angles

e)L'image d'un cercle

L'image d'un cercle (ζ) *de centre* O *et de rayon* r *par une translation est le cercle* (ζ') *de centre* O' *l'image de* O *par la même translation et de même rayon* r



hassan.sabil56@gmail.com