

Exercice 1

$$A = \sqrt{49} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{35}}{\sqrt{7}}$$

$$1 - \quad = \sqrt{7^2} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{35}}{\sqrt{7}}$$

$$\boxed{A=7} \quad ; \quad = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$= \sqrt{5^2}$$

;

$$\boxed{B=5}$$

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{18} + 3\sqrt{32} - 7\sqrt{2} \\ &= \sqrt{9 \times 2} + 3\sqrt{16 \times 2} - 7\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 7\sqrt{2} \\ &= (3+12-7)\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{C=8\sqrt{2}}$$

$$2 - \quad \frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}) \times (3+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}$$

$$= \frac{7(3+\sqrt{2})}{7}$$

$$= 3+\sqrt{2}$$

$$3 - A = (x+3)^2$$

$$\boxed{A = x^2 + 6x + 9}$$

$$B = (x-2)^2 + (x+3\sqrt{2})(x-3\sqrt{2})$$

$$= x^2 - 4x + 4 + x^2 - 18$$

$$\boxed{B = 2x^2 - 4x - 14}$$

$$\begin{aligned} b) \quad C &= 9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 \\ &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{C = (3x - \sqrt{2})^2}$$

$$\begin{aligned} c) \quad D &= 42.5 \times 10^9 \times 0.00003 \\ &= 42.5 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-5} \\ &= 42.5 \times 3 \times 10^{9-5} \\ &= 127.5 \times 10^4 \end{aligned}$$

$$\boxed{D = 1.275 \times 10^6}$$

Exercice 2

$$1- a) \text{ Comparons } 3\sqrt{2} \text{ et } 2\sqrt{3}$$

$$\text{On a } (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 \text{ et } (2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{On a } 12 < 18 \text{ c-à-d } (2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2$$

$$\text{Donc } 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

$$b) \text{ en déduire la comparaison de}$$

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}} \text{ et } \frac{1}{5+3\sqrt{2}}$$

$$\text{On a } 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } 5+2\sqrt{3} < 5+3\sqrt{2}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{5+2\sqrt{3}} > \frac{1}{5+3\sqrt{2}}$$

$$2- \text{ On a } 4 \leq x \leq 9 \text{ et } 1 \leq y \leq 3$$

$$\checkmark \quad 4+1 \leq x+y \leq 9+3$$

$$\boxed{5 \leq x+y \leq 12}$$

$$\checkmark \quad 8 \leq 2x \leq 18 \text{ et } -9 \leq -3y \leq -3$$

$$8+(-9) \leq 2x+(-3y) \leq 18+(-3)$$

$$\boxed{-1 \leq 2x-3y \leq 15}$$

$$\checkmark \quad 4 \leq x \leq 9 \text{ et } 1 \leq y \leq 3$$

$$4 \times 1 \leq x \times y \leq 9 \times 3$$

$$\boxed{4 \leq xy \leq 27}$$

3- Comparons $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ et 2

$$\text{On a } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

On a $(a-b)^2 \geq 0$

Et puisque $a > 0$ et $b > 0$ donc $ab > 0$

$$\text{D'où } \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$$

$$\text{Donc } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$$

$$\text{D'où } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Exercice 3

1) Montrons que $(MN) \parallel (EF)$

$$\text{On a } \frac{GM}{GF} = \frac{3}{4.5} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{GN}{GE} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } \frac{GM}{GF} = \frac{GN}{GE}$$

Dans le triangle EFG

$$M \in (FG); N \in (GE) \text{ et } \frac{GM}{GF} = \frac{GN}{GE}$$

Et puisque les points G ; M et F sont rangés dans le même ordre que les points G ; N et E

D'après la réciproque du Théorème de Thalès

On a $(MN) \parallel (EF)$

2) Calculons MN

Dans le triangle EFG

$$M \in (FG); N \in (GE) \text{ et } (MN) \parallel (EF)$$

D'après le théorème de Thalès

$$\text{On a } \frac{GM}{GF} = \frac{GN}{GE} = \frac{MN}{EF}$$

$$\frac{MN}{EF} = \frac{GN}{GE} \text{ donc } MN = \frac{GN}{GE} \times EF$$

$$MN = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$\boxed{MN = 4}$$

Exercice 4

1- On a ABC un triangle rectangle en A
D'après le théorème de Pythagore

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 20 - 4 = 16$$

$$\text{Donc } \boxed{AC = 4}$$

2- Montrons que le triangle BCD est rectangle
On a

$$BC = 2\sqrt{5}; DC = 4\sqrt{5} \text{ et } BD = BA + AD = 2 + 8 = 10$$

$$\text{Donc } BC^2 = 20; DC^2 = 80 \text{ et } BD^2 = 100$$

$$\text{On a } BC^2 + DC^2 = 20 + 80 = 100$$

$$\text{Donc } BC^2 + DC^2 = BD^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle BCD est rectangle en C

$$3- \cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{On a } \hat{A}BC + \hat{A}CB = 90^\circ$$

$$\text{Donc } \cos \hat{A}CB = \sin \hat{A}BC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \hat{A}CB = \cos \hat{A}BC = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$4- A = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \times \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$A = \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha) \times (1 + \sin^2 \alpha)} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$A = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$A = \sqrt{\cos^2 \alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$A = \cos \alpha \times \frac{1}{\cos \alpha} = 1$$

$$\boxed{A = 1}$$

$$5- B = 2023 \sin^2 54^\circ - 2022 \cos^2 20^\circ + 2023 \sin^2 36^\circ - 2022 \cos^2 70^\circ$$

$$B = 2023 \sin^2 54^\circ - 2022 \cos^2 20^\circ + 2023 \cos^2 54^\circ - 2022 \sin^2 20^\circ$$

$$B = 2023 (\sin^2 54^\circ + \cos^2 54^\circ) - 2022 (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ)$$

$$B = 2023 \times 1 - 2022 \times 1$$

$$B = 2023 - 2022$$

$$\boxed{B = 1}$$

Exercice 5

1. On a $\hat{A}DB = \hat{A}CB$ (angles inscrits interceptant le même arc AB)

$$\text{Donc } \hat{A}DB = 30^\circ$$

2. Montrons que les triangles AFB et AFD sont isométriques

On a $AB = AD$ (donnée)

Donc le triangle ABD est isocèle en A

puisque $[AF]$ est la hauteur relative au côté $[BD]$

Donc $[AF]$ est aussi la médiane de ABD

D'où F est le milieu de $[BD]$

$$\text{Donc } BF = FD$$

$$AF = AF \text{ (côté commun)}$$

Dans les triangles AFB et AFD

$$AF = AF ; AB = AD \text{ et } BF = FD$$

Donc les triangles AFB et AFD sont isométriques

3. Montrons que les triangles AKB et ABC sont semblables

On a $\hat{A}BK = \hat{A}DB$ (ABD est un triangle isocèle en A)

$\hat{A}DB = \hat{A}CB$ (D'après la question précédente)

$$\text{Donc } \hat{A}BK = \hat{A}CB$$

Et $\hat{B}AK = \hat{B}AC$ (même angle $K \in (AC)$)

Dans les triangles AKB et ABC

$$\hat{A}BK = \hat{A}CB \text{ et } \hat{B}AK = \hat{B}AC$$

Donc les triangles AKB et ABC sont semblables

4. AKB et ABC sont semblables

$$\text{Donc } \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{BK}{CB}$$

$$\text{on a } \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB} \text{ donc } AB \times AB = AK \times AC$$

$$\text{D'où } AB^2 = AK \times AC$$

