

Correction de l'examen normalisé n° 5

Exercice 1

$$1) A = \sqrt{49} \\ = \sqrt{7^2} \\ A = 7$$

$$B = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{35}}{\sqrt{7}} \\ = \frac{\sqrt{5 \times 5 \times 7}}{\sqrt{7}} \\ = \frac{\sqrt{5 \times 5 \times 7}}{\sqrt{7}} \\ = \sqrt{5^2} \\ B = 5$$

$$C = \sqrt{18} + 3\sqrt{32} - 7\sqrt{2} \\ = \sqrt{9 \times 2} + 3\sqrt{16 \times 2} - 7\sqrt{2} \\ = 3\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 7\sqrt{2} \\ = (3 + 12 - 7)\sqrt{2} \\ C = 8\sqrt{2}$$

$$2) \frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{3} \\ \frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} \\ = \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2} \\ = \frac{7(3+\sqrt{2})}{7} \\ = 3 + \sqrt{2}$$

$$3) A = (x+3)^2 \\ A = x^2 + 6x + 9$$

$$B = (x-2)^2 + (x+3\sqrt{2})(x-3\sqrt{2}) \\ = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 9 \times 2 \\ = x^2 - 4x + 4 + x^2 - 18 \\ B = 2x^2 - 4x - 14$$

$$b) C = 9x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 \\ = (3x)^2 - 2 \times 3\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 \\ = (3x - \sqrt{2})^2$$

$$4) D = 42,5 \times 10^9 \times 0,00003 \\ = 42,5 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-5} \\ = 42,5 \times 3 \times 10^{9-5} \\ = 127,5 \times 10^4 \\ D = 1,275 \times 10^6$$

Exercice 2

$$1) a) \text{ Comparons } 3\sqrt{2} \text{ et } 2\sqrt{3} \\ \text{On a } (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 \text{ et } (2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{On a } 12 < 18 \text{ c.à.d. } (2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2$$

$$\text{donc } 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

$$b) \text{ En deduire la comparaison de } \frac{1}{5+3\sqrt{2}} \text{ et } \frac{1}{5+2\sqrt{3}}$$

$$\text{On a } 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

$$\text{donc } 5+2\sqrt{3} < 5+3\sqrt{2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{5+2\sqrt{3}} > \frac{1}{5+3\sqrt{2}}$$

$$2) \text{ On a } x+4 \leq x \leq 9 \text{ et } 1 \leq y \leq 3$$

$$4+1 \leq x+y \leq 9+3$$

$$5 \leq x+y \leq 12$$

$$* 8 \leq 2x \leq 18 \quad -9 \leq -3y \leq -3$$

$$8+(-9) \leq 2x+(-3y) \leq 18+(-3)$$

$$-1 \leq 2x-3y \leq 15$$

$$* 4 \leq x \leq 9 \text{ et } 1 \leq y \leq 3$$

$$4 \times 1 \leq x \times y \leq 9 \times 3$$

$$4 \leq xy \leq 27$$

$$3) \text{ On } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} \\ = \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$\text{On a } (a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{et puisque } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\text{donc } ab > 0$$

$$\text{d'où } \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$$

$$\text{donc } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$$

$$\text{d'où } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Exercice 3

$$1) \text{ Montrons que } (MN) \parallel (EF)$$

$$\text{On a } \frac{GM}{GF} = \frac{3}{4,5} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{GN}{GE} = \frac{2}{3}$$

$$\text{donc } \frac{GM}{GF} = \frac{GN}{GE}$$

Dans le triangle EFG.

$$M \in (FG) ; N \in (GE) \text{ et } \frac{GM}{GF} = \frac{GN}{GE}$$

et puisque les points G, M et F sont rangés dans le même ordre que les points G, N et E d'après la réciproque du théorème de Chales

$$(MN) \parallel (EF)$$

2) Calculons MN

Dans le triangle EFG

$M \in (GF)$; $N \in (GE)$ et $(MN) \parallel (EF)$

d'après le théorème de Thalès

$$\text{on a : } \frac{GN}{GE} = \frac{GM}{GF} = \frac{MN}{EF}$$

$$\frac{MN}{EF} = \frac{GN}{GE} \text{ donc } MN = \frac{GN}{GE} \times EF$$

$$MN = \frac{2}{3} \times \frac{6}{2} = 4$$

$$\boxed{MN = 4}$$

Exercice 4

1) On a ABC un triangle rectangle en A

d'après théorème de Pythagore

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 20 - 4 = 16$$

$$\text{donc } AC = 4$$

2) Montrons que le triangle BED est rectangle

$$\text{On a } BE = 2\sqrt{5} \quad ; \quad DE = 4\sqrt{5} \quad ; \quad BD = BA + AD = 2 + 8 = 10$$

$$BE^2 = 20$$

$$DE^2 = 80$$

$$BD^2 = 100$$

$$\text{On a } BE^2 + DE^2 = 20 + 80 = 100$$

$$\text{donc } BE^2 + DE^2 = BD^2$$

d'après le réciproque du théorème de Pythagore BCD est un triangle rectangle en C.

$$3) \cos \hat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \hat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{On a } \hat{ABC} + \hat{ACB} = 90^\circ$$

$$\text{donc } \cos \hat{ACB} = \sin \hat{ABC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \hat{ACB} = \cos \hat{ABC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$4) A = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \times \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$= \sqrt{(1 + \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \alpha} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$= \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$= 1$$

$$\begin{aligned} 5) B &= 2023 \sin^2 54^\circ - 2022 \cos^2 20^\circ + 2023 \sin^2 36^\circ - 2022 \cos^2 70^\circ \\ &= 2023 \sin^2 54^\circ - 2022 \cos^2 20^\circ + 2023 \cos^2 54^\circ - 2022 \sin^2 20^\circ \\ &= 2023 (\sin^2 54^\circ + \cos^2 54^\circ) - 2022 (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) \\ &= 2023 \times 1 - 2022 \times 1 \\ &= 2023 - 2022 \end{aligned}$$

$$B = 1$$

Exercice 5

On a $\hat{ADB} = \hat{ACB}$ (angles inscrits interceptant la même arc AB)

$$\text{donc } \hat{ADB} = 30^\circ$$

1) Montrons que AFB et AFD

On a $AB = AD$ (Donnée)

donc le triangle ABD est isocèle en A

et puisque AF est la hauteur relative au (BD)

donc AF est aussi la médiane

d'où F est le milieu de (BD)

$$\text{donc } BF = FD \quad (2)$$

Dans les triangles AFB et AFD

$$AB = AD \quad ; \quad BF = FD$$

et AF = AF un côté commun

donc les triangles AFB et AFD sont isométriques

3) Montrons que les triangles ACB et ABC sont semblables

On a $\hat{ABK} = \hat{ADB}$ (ABD triangle isocèle en A)

et $\hat{ADB} = \hat{ACB}$ (d'après la question précédente)

$$\text{donc } \hat{ABK} = \hat{ACB} \quad (1)$$

et $\hat{BAK} = \hat{BAE}$ (même angle $\angle(AAC)$)

Dans les triangles ABK et ABC :

$$\hat{ABK} = \hat{ACB} \text{ et } \hat{BAK} = \hat{BAE}$$

donc les 2 triangles ABK et ABC

sont semblables

4) ABK et ACB sont semblables

$$\text{donc } \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{BK}{CB}$$

$$\text{On a } \frac{AB}{AC} = \frac{AK}{AB} \text{ donc}$$

$$AB \times AB = AK \times AC$$

$$AB^2 = AK \times AC$$